B. A. EXAMINATION, 2022

(Fifth Semester)

(Main/Re-appear)

MATHEMATICS

BM352

Groups and Rings

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 27*

Note : Attempt *Five* questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

Unit I
इकाई I

1. (a) Show that the set $G = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in Q\}$ is an abelian group with respect to addition. **3**

दिखाइए कि समुच्चय $G = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in Q\}$ योग के सापेक्ष एक आबेली समूह है ।

(b) A necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is that $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is inverse of b in G. **2.4**

किसी समूह G के अरिक्त उपसमुच्चय H के उपसमूह होने के लिए आवश्यक व पर्याप्त शर्त है $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, जहाँ b^{-1}, G में b का व्युत्क्रम है ।

2. (a) Prove that the order of each subgroup of a finite group is a diverse of the order of the group. **3**

सिद्ध कीजिए कि किसी निश्चित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि की एक विभाजक होती है ।

(b) Prove that every quotient group of a cyclic group is cyclic. **2.4**

सिद्ध कीजिए कि किसी चक्रीय समूह का प्रत्येक लब्धि समूह चक्रीय होता है ।

Unit II

इकाई II

3. (a) Every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G. **3**

किसी समूह G की प्रत्येक होमोमॉर्फिक इमेज G के किसी लब्धि समूह के आइसोमॉर्फिक होती है ।

(b) If $o(\text{Aut } G) > 1$, then show that : **2.4**

$$o(G) > 2$$

यदि $o(\text{Aut } G) > 1$, तब दिखाइए कि :

$$o(G) > 2$$

4. (a) Let $Z(G)$ be the centre of a group G, if G/Z is cyclic, then prove that G is abelian. **3**

माना $Z(G)$ किसी समूह G का केंद्र है । यदि G/Z चक्रीय है, तो सिद्ध कीजिए कि G आबेली है ।

(b) Write $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ as the product of disjoint cycles. **2.4**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ को डिसजॉइंट साइकल्स के गुणन के रूप में लिखिए ।

Unit III

इकाई III

5. (a) Every field is an integral domain. **3**

प्रत्येक क्षेत्र एक समाकल क्षेत्र होता है ।

(b) The intersection of two subrings is a ring. **2.4**

दो उपवलयों का प्रतिच्छेदन एक वलय होता है ।

6. (a) The ring of integers is a principal ideal ring. **3**

पूर्णांकों का वलय मुख्य आइडियल वलय होता है ।

(b) Let $f: R \rightarrow R'$ be a ring homomorphism. Let S be an ideal of R. Then $f(S)$ is an ideal of $f(R)$. **2.4**

माना $f: R \rightarrow R'$ एक वलय समाकारिता है। माना S, R का एक आइडियल है। तब $f(S)$, $f(R)$ का एक आइडियल है।

Unit IV

इकाई IV

7(a) The ring of Gaussian integers is an Euclidean domain (ring). **3**

गॉसीय पूर्णांकों का वलय एक यूक्लिडीय क्षेत्र (वलय) होता है।

(b) An element in a principal ideal domain is prime element iff it is irreducible. **2.4**

किसी मुख्य आइडियल क्षेत्र में कोई अवयव प्राइम अवयव होता है यदि और केवल यदि यह irreducible है।

8 (a) If R is an integral domain, then $R[x]$ is also an integral domain. **3**

यदि R कोई समाकल क्षेत्र है, तो $R[x]$ भी एक समाकल क्षेत्र होता है।

P.T.O.

(b) Every principal ideal domain is a unique factorization domain. **2.4**

प्रत्येक मुख्य आइडियल क्षेत्र एक अद्वितीय फैक्टराइजेशन क्षेत्र होता है।

Unit V

इकाई V

9. (a) Show that a group upto order 2 is abelian. **1**

दिखाइए कि कोटि 2 तक का एक समूह आबेली होता है। https://www.cbluonline.com

(b) Define a quotient group. **1**

लब्धि समूह को परिभाषित कीजिए।

(c) Define integral domain. **1**

समाकल क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

(d) Show that the ring Z_5; $\{(0, 1, 2, 3, 4), +_5, x_5\}$ has no proper ideal. **1**

दिखाइए कि वलय Z_5; $\{(0, 1, 2, 3, 4), +_5, x_5\}$ का कोई प्रॉपर आइडियल नहीं होता है।

(e) State Gauss Lemma. **1.4**

गॉस लेमा को लिखिए।