

S.C.No.—2104101

**B. Sc. (Medical/Non-Medical/Comp. Sci./
Actuarial Sci.) EXAMINATION, 2023**

(First Semester)

(For Main/Re-appear) (2021 & 2022 Batch)

MATHEMATICS

20UMTH101

Algebra

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 40

Note : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question from each Unit. Q. No. 9 is compulsory. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

(S-1222-08/6) H-2104101(UG1-891)(TR)

P.T.O.

Unit I

इकाई I

1. (a) Every square matrix A can be expressed in one and only one way as $P + iQ$, where P and Q are Hermitian matrices. 4
प्रत्येक वर्ग आव्यूह A एक और केवल एक ही तरीके से $P + iQ$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, जहाँ P व Q हर्मिटीय आव्यूह हैं ।

(b) Define linear independence. For what value of ' p '; $(1, -1, 3)$, $(1, 2, -3)$ and $(p, 0, 1)$ are linearly dependent ? 4
रैखिकतः स्वतंत्रता को परिभाषित कीजिए । ' p ' के किस मान के लिए $(1, -1, 3)$, $(1, 2, -3)$ तथा $(p, 0, 1)$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं ?

2. (a) Find eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

4

H-2104101(UG1-891)(TR)

2

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान व

संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए ।

- (b) Prove that the characteristic roots of a Hermitian matrix are all real. 4

सिद्ध कीजिए कि हर्मिटीय आव्यूह के लाक्षणिक मूल सभी वास्तविक होते हैं ।

Unit II

इकाई II

3. (a) Check the consistency of the following system :

$$x + 2y - z = 6,$$

$$3x - y - 2z = 3$$

and $4x + 3y + z = 9.$

Also find the solution if consistent. 4

निम्नलिखित निकाय की संगतता का परीक्षण कीजिए :

$$x + 2y - z = 6,$$

$$3x - y - 2z = 3$$

तथा $4x + 3y + z = 9.$

संगत होने पर हल भी निकालिए ।

- (b) Prove that the absolute value of each characteristic root of unitary matrix is unity. 4

सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह के प्रत्येक लाक्षणिक मूल का परम मान इकाई होता है ।

4. (a) Reduce :

$$x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_1y_4 + 2x_2y_1 -$$

$$2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_2y_4 + 3x_3y_1 +$$

$$4x_3y_3 + x_3y_4$$

to canonical form. Also find the equations of transformations. 4

$$x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_1y_4 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_2y_4 + 3x_3y_1 + 4x_3y_3 + x_3y_4$$

का कैनॉनिकल रूप में समानयन कीजिए ।
रूपांतरणों के समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

(b) Diagonalize :

$$4x_1^2 + 10x_2^2 + 11x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 12x_2x_3$$

using Lagrange's method. 4

लैग्रांज विधि द्वारा विकर्णीकरण कीजिए :

$$4x_1^2 + 10x_2^2 + 11x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 12x_2x_3.$$

Unit III

इकाई III

5. (a) Solve the equation :

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0,$$

given that its roots are in A.P. 4

समीकरण :

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0,$$

को हल कीजिए । दिया है कि इसके मूल समांतर श्रेणी में हैं ।

(b) Solve the equation :

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0,$$

given that it has multiple roots. 4

समीकरण :

$$x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0,$$

को हल कीजिए, दिया है कि इसके अनेक मूल हैं ।

6. (a) Remove the second term from the equation $x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 25 = 0$ and hence solve it. 4

समीकरण $x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 25 = 0$ से द्वितीय पद का विलोपन कीजिए तथा इसे हल कीजिए ।

(b) Find the equation of squared differences of the roots of the equation $x^3 - 7x + 6 = 0$. 4

समीकरण $x^3 - 7x + 6 = 0$ के मूलों के वर्ग किये हुए अंतरों का समीकरण निकालिए ।

Unit IV

इकाई IV

7/ (a) Solve using Cardan's method :

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0. \quad 4$$

कार्डन विधि से हल कीजिए :

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0.$$

(b) Resolve into factors using Descartes' method :

$$x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 26x + 14 = 0. \quad 4$$

देकार्त विधि से गुणखंडों में विभक्त कीजिए :

$$x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 26x + 14 = 0.$$

8. (a) Solve using Ferrari's method :

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0. \quad 4$$

फेरारी विधि से हल कीजिए :

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0.$$

(b) Show that the equation :

$$2x^7 + 3x^4 + 3x + k = 0$$

has at least 4 imaginary roots for all values of k . 4

दिखाइए कि समीकरण $2x^7 + 3x^4 + 3x + k = 0$ के कम से कम 4 काल्पनिक मूल k के सभी मानों के लिए हैं ।

(Compulsory Question)

(अनिवार्य प्रश्न)

9. (a) If A is a square matrix prove that $A + A'$ is symmetric. 1

यदि A कोई वर्ग आव्यूह है तो सिद्ध कीजिए कि $A + A'$ सममित है ।

(b) Define Rank of a matrix. 1

किसी आव्यूह की कोटि को परिभाषित कीजिए ।

(c) Define Monic polynomial and Minimal polynomial. 1

मोनिक बहुपद तथा मिनिमल बहुपद को परिभाषित कीजिए ।

(d) If A is an orthogonal matrix, prove $(A) = \pm 1$. 1

यदि A लंबकोणीय आव्यूह हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(A) = \pm 1$ ।

(e) Form an equation whose one root is $1+2i$. 1

एक समीकरण बनाइए जिसका एक मूल $1+2i$ हो ।

(f) If α, β, γ are the roots of the equation

$$2x^3 + x^2 + x + 2 = 0, \text{ find } \sum \left(\frac{1}{\alpha} + \beta\gamma \right).$$

यदि α, β, γ समीकरण $2x^3 + x^2 + x + 2 = 0$

के मूल हों, तो $\sum \left(\frac{1}{\alpha} + \beta\gamma \right)$ ज्ञात कीजिए ।

(g) Discuss the nature of the roots of the equation $x^6 + x^4 + 2 = 0$. 1

समीकरण $x^6 + x^4 + 2 = 0$ के मूलों की प्रकृति की चर्चा कीजिए ।