S.C.No.—2009203

B.Sc. (Hons.) EXAMINATION, 2024

(Main)

(Second Semester)

MATHEMATICS

BHM123

Vector Calculus

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 60*

Note : Attempt *Five* questions in all. Q. No. **1** is compulsory. All questions carry equal marks.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Show that : **6**

$$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$$

दिखाइए कि :

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$$

(b) Given $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ and $\vec{c}=\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$. Find the reciprocal triads $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ and verify that : **6**

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\left[\vec{a}'\ \vec{b}'\ \vec{c}'\right]=1$$

दिया गये है $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ । व्युत्क्रम त्रिक $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ ज्ञात कीजिए और सत्यापित कीजिए कि :

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\left[\vec{a}'\ \vec{b}'\ \vec{c}'\right]=1$$

2. (a) The necessary and sufficient condition for the vector function $\vec{f}$ of a scalar variable t to have constant direction is $\vec{f}\times\frac{d\vec{f}}{dt}=0$. **6**

एक अदिश चर t के सदिश फलन $\vec{f}$ की दिशा स्थिर रहने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्त $\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} = 0$ है ।

(b) Show that if $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are constant vectors, then $\vec{r} = \vec{a}t^2 + b^2t + \vec{c}$ is the path of a particle moving with constant acceleration. 6

दिखाइए कि यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ स्थिर सदिश हैं, तो $\vec{r} = \vec{a}t^2 + b^2t + \vec{c}$ स्थिर त्वरण के साथ गतिमान कण का पथ है ।

3. (a) If $r = |\vec{r}|$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ prove that : 6

$$\nabla f(r) \times \vec{r} = \vec{0}$$

यदि $r = |\vec{r}|$, जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\nabla f(r) \times \vec{r} = \vec{0}$$

(b) Find the constants a and b so that the surface $ax^2 - byz = (a+2)x$ will be orthogonal to the surface $4x^2y + z^3 = 4$ at the point (1, –1, 2). **6**

स्थिरांक a और b ज्ञात कीजिए ताकि सतह $ax^2 - byz = (a+2)x$ बिंदु (1, –1, 2) पर सतह $4x^2y + z^3 = 4$ के लिए लम्बकोणीय हो ।

4. (a) Show that : **6**

$$\operatorname{div}\left[\frac{f(r)\vec{r}}{r}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f(r)\right)$$

दिखाइए कि :

$$\operatorname{div}\left[\frac{f(r)\vec{r}}{r}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f(r)\right)$$

(b) If $\vec{a}$ is a constant vector, find $\operatorname{curl}(\vec{r} \times \vec{a})$. **6**

यदि $\vec{a}$ एक स्थिर वेक्टर है, तो $\operatorname{curl}(\vec{r} \times \vec{a})$ ज्ञात कीजिए ।

5. (a) Transform the function $\vec{f} = \rho\hat{e}_\rho + \rho\hat{e}_\phi$ from cylindrical to Cartesian co-ordinates. 6

फंक्शन $\vec{f} = \rho\hat{e}_\rho + \rho\hat{e}_\phi$ को बेलनाकार से कार्तीय निर्देशांक में बदलिए ।

(b) Express the vector $x\hat{i} + 2y\hat{j} + yz\hat{k}$ in spherical coordinates. 6

वेक्टर $x\hat{i} + 2y\hat{j} + yz\hat{k}$ को गोलाकार निर्देशांक में व्यक्त कीजिए ।

6. (a) Express the velocity $\vec{v}$ and acceleration $\vec{a}$ of a particle in cylindrical co-ordinates. 6

एक कण के वेग $\vec{v}$ और त्वरण $\vec{a}$ को बेलनाकार निर्देशांक में व्यक्त कीजिए ।

(b) If ρ, ϕ, z are cylindrical co-ordinates, show that $\nabla\phi$ and $\nabla \log \rho$ are solenoid. 6

यदि ρ, ϕ, z बेलनाकार निर्देशांक हैं, तो दिखाइए कि $\nabla\phi$ और $\nabla \log \rho$ परिनालिका हैं ।

7. (a) If $\vec{A} = 2xy\hat{i} + (x^2 - y^2)\hat{j}$, evaluate the line integral of $\vec{A}$ from the point (0, 0) to (1, 1) along the curve $y^2 = x$. **6**

यदि $\vec{A} = 2xy\hat{i} + (x^2 - y^2)\hat{j}$, वक्र $y^2 = x$ के अनुदिश बिंदु (0, 0) से (1, 1) तक $\vec{A}$ की रेखा अभिन्न का मान ज्ञात कीजिए ।

(b) Evaluate $\iint_S \vec{f}.\hat{n}dS$, where $\vec{f} = y\hat{i} + 2x\hat{j} - z\hat{k}$ and S is surface of the plane in the first octant cut off by the plane $z = 4$. **6**

$\iint_S \vec{f}.\hat{n}dS$, का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{f} = y\hat{i} + 2x\hat{j} - z\hat{k}$ और S विमान $z = 4$ द्वारा काटे गए पहले अष्टक में विमान की सतह है ।

8. (a) Show that : 6

$$\oint_C \phi \nabla \psi . d\vec{r} = - \oint_C \psi \nabla \phi . d\vec{r}$$

दिखाओ कि:

$$\oint_C \phi \nabla \psi . d\vec{r} = - \oint_C \psi \nabla \phi . d\vec{r}$$

(b) Evaluate by Green's theorem $\oint (\cos x \sin y - xy)\, dx + \sin x \cos y dy$. where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$. 6

ग्रीन के प्रमेय

$\oint (\cos x \sin y - xy)\, dx + \sin x \cos y dy$.

द्वारा मूल्यांकन कीजिए जहाँ C वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है ।

9. (a) Define reciprocal system of vectors. 2

वैक्टर की पारस्परिक प्रणाली को परिभाषित कीजिए ।

(b) Show that div $\vec{f}$ is zero if $\vec{f}$ is constant. 2

दिखाइए कि यदि $\vec{f}$ स्थिरांक है तो div $\vec{f}$ शून्य है ।

(c) Show that : 2

$$\text{Curl grade } \phi = \vec{0}$$

दिखाइए कि :

$$\text{Curl grade } \phi = \vec{0}$$

(d) Define circulation of $\vec{f}$ around the curve. 2

वक्र के चारों ओर $\vec{f}$ के परिसंचरण को परिभाषित कीजिए ।

(e) Show that : 2

$$\oint_C \vec{r}.d\vec{r} = 0$$

दिखाइए कि :

$$\oint_C \vec{r}.d\vec{r} = 0$$

(f) State Green's theorem. 2

ग्रीन का प्रमेय बताइए ।