S.C.No.—2009301

B.Sc. (Hons.)

EXAMINATION, Dec, 2024

(Main/Reappear)

(Third Semester)

MATHEMATICS

BHM 231

Advanced Calculus

Time : 3 Hours *Maximum Marks* : 60

Note : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question each from Section I to IV. Q. No. 9 from Section V is compulsory.

प्रत्येक इकाई I से इकाई IV तक से **एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । इकाई V से प्रश्न क्र. 9 अनिवार्य है ।

Section I

खण्ड I

1. (a) Show that the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is discontinuous everywhere. **6**

दर्शाइए कि

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ परिमेय} \\ 0 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f हर जगह असंतत है ।

(b) Prove that between any two real roots of $e^x \cos x = x$, there is at least one root of $\cos x - \sin x = e^{-x}$. **6**

सिद्ध कीजिए कि $e^x \cos x = x$ के किन्हीं दो वास्तविक मूलों के बीच, $\cos x - \sin x = e^{-x}$ का कम से कम एक मूल होता है ।

2. (a) Verify Lagrange's mean value theorem for $f(x) = \sin x$ in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$. **6**

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ में $f(x) = \sin x$ के लिए लैग्रेंज माध्य मान प्रमेय का सत्यापन कीजिए ।

(b) Show that : **6**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

दर्शाइए कि :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

Section II

खण्ड II

3. (a) Show that $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ is continuous at the origin. **6**

दर्शाइए कि $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ मूल बिंदु पर सतत् है ।

(b) If $u = e^{ax+by} f(ax-by)$, show that : 6

$$b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = 2abu.$$

यदि $u = e^{ax+by} f(ax-by)$, तो दर्शाइए कि :

$$b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = 2abu.$$

4. (a) If $u = \sin^{-1}(x^2+y^2)^{1/5}$, show that : 6

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= \frac{2}{25}\tan u(2\tan^2 u - 3).$$

यदि $u = \sin^{-1}(x^2+y^2)^{1/5}$ है, तो दर्शाइए कि :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= \frac{2}{25}\tan u(2\tan^2 u - 3).$$

(b) Expand $e^x \cos y$ at $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ by Taylor's theorem. 6

टेलर के प्रमेय द्वारा $e^x \cos y$ को $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ पर विस्तारित कीजिए ।

Section III

खण्ड III

5. (a) If f_x, f_y, f_{yx} all exist in the neighbourhood of the point (a, b) and f_{yx} is continuous at the point (a, b), then show that $f_{xy}(a, b)$ also exists at (a, b) and $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. 6

यदि f_x, f_y, f_{yx} सभी बिंदु (a, b) के आस-पास मौजूद हैं और f_{yx} बिंदु (a, b) पर निरंतर है, तो दिखाइए कि $f_{xy}(a, b)$, (a, b) पर भी मौजूद है और $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ ।

(b) Show that the function defined by $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $(y \neq 0)$ is differentiable at (x, y) with $y \neq 0$. **6**

दिखाइए कि $f(x, y) = \frac{x}{y}$ द्वारा परिभाषित फलन, $(y \neq 0)$, $y \neq 0$ के साथ (x, y) पर अवकलनीय है ।

6. (a) Show that the rectangular solid of maximum volume that can be inscribed in a given sphere is a cube. **6**

दिखाइए कि अधिकतम आयतन वाला आयताकार ठोस जिसे किसी दिए गए गोले में अंदर किया जा सकता है, एक घन है ।

(b) Prove that the stationary values of $u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ where $lx + my + nz = 0$ and $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, are the roots of the equation $\frac{l^2a^4}{1-a^2u} + \frac{m^2b^4}{1-b^2u} + \frac{n^2c^4}{1-c^2u} = 0$. 6

सिद्ध कीजिए कि $u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ के स्थिर मान जहाँ $lx + my + nz = 0$ और $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, समीकरण $\frac{l^2a^4}{1-a^2u} + \frac{m^2b^4}{1-b^2u} + \frac{n^2c^4}{1-c^2u} = 0$ के मूल हैं ।

Section IV

खण्ड IV

7. (a) Find the equation of osculating plane of the curve $x = 2 \log t$, $y = 4t$, $z = 2t^2 + 1$. 6

वक्र $x = 2 \log t,\ y = 4t,\ z = 2t^2 + 1$ के ऑस्कुलेटिंग समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Show that :

(i) $\frac{d\hat{t}}{ds} = K\hat{n}$

(ii) $\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}$

K is the magnitude of curvature and τ is the magnitude of torsion. **6**

दर्शाइए कि :

(i) $\frac{d\hat{t}}{ds} = K\hat{n}$

(ii) $\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}$

K वक्रता का परिमाण है तथा τ आघूर्ण बल का परिमाण है।

8. (a) If the tangent and binormal at a point of a curve makes angle θ and ϕ with a fixed direction, show that : 6

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi}\frac{d\theta}{d\phi}=\frac{-K}{\tau}$$

यदि वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्शरेखा तथा द्विलंब एक निश्चित दिशा के साथ कोण θ तथा ϕ बनाते हैं, तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi}\frac{d\theta}{d\phi}=\frac{-K}{\tau}$$

(b) For a spherical curve, prove that $\rho+\frac{d^2\rho}{d\psi^2}=0$, where ψ is such that $d\psi = \tau\, ds$. 6

एक गोलाकार वक्र के लिए, सिद्ध कीजिए कि

$\rho + \dfrac{d^2\rho}{d\psi^2} = 0$, जहाँ ψ ऐसा है कि $d\psi = \tau\, ds$

है ।

Section V

खण्ड V

9. (a) State Young's theorem. **6×2=12**

यंग का प्रमेय बताइए ।

(b) Define uniform continuity of a function.

किसी फलन की एकसमान सातत्यता को परिभाषित कीजिए ।

(c) Expand $\sqrt{x}$ in ascending powers of x by Maclaurin's theorem, if possible.

यदि संभव हो तो मैकलॉरिन के प्रमेय द्वारा x की आरोही घातों में $\sqrt{x}$ का विस्तार कीजिए ।

(d) Evaluate $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{\log(x-a)}{\log(e^x - e^a)}$ by L'Hospital's Rule.

एल'हॉस्पिटल के नियम द्वारा $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{\log(x-a)}{\log(e^x - e^a)}$ का मान निकालिए ।

(e) Find the total derivative of u with respect to t, where $u = e^x \sin y$, where $x = \log t$, $y = t^2$.

t के सापेक्ष u का कुल अवकलज ज्ञात कीजिए, जहाँ $u = e^x \sin y$, जहाँ $x = \log t, y = t^2$ ।

(f) Show that the involute of a circular helix are plane curves. **6×2=12**

दिखाइए कि एक वृत्ताकार हेलिक्स के इनवोल्यूट समतल वक्र हैं ।