(10SEP47)

Roll No. ....

S.C.No.—A/21/2004403

B. Sc. EXAMINATION, 2021

(Fourth Semester)

MATHEMATICS

12BSM241

Sequences and Series

Time : 2 Hours *Maximum Marks* : 40

Note : Attempt *Four* questions in all. All questions carry equal marks.

कुल **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

Section A
खण्ड 'अ'

1\. (a) Between two distinct real numbers, there are infinitely many rational numbers. Prove. 5

दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं । सिद्ध कीजिए ।

https://www.cbluonline.com

(b) Prove that the union of an arbitrary family of open sets is an open set. 5

सिद्ध कीजिए कि खुले सेट के एक आर्बिट्रेरी परिवार का संघ एक खुला सेट है ।

2\. (a) Every infinite bounded subset of real numbers has a limit point. Prove. 5

वास्तविक संख्याओं के प्रत्येक अनंत परिबद्ध उपसमुच्चय का एक सीमा बिंदु होता है । सिद्ध कीजिए ।

(b) Show that intersection of any family of compact sets is compact. 5

दर्शाइए कि संहत समुच्चय द्वारा किसी भी परिवार का प्रतिच्छेदन संहत है ।

Section B
खण्ड 'ब'

3\. (a) If a sequence $\langle a_n \rangle$ converges to a and

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$ then the sequence $\langle b_n \rangle$ also converges to a. 5

यदि अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ a और $b_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ में अभिसरित होता है, तो अनुक्रम $\langle b_n \rangle$ a में भी अभिसरित हो जाता है ।

(b) Prove that the sequence $\langle a_n \rangle$ defined by :

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$

is convergent and $2 \le \lim_{n \to \infty} a_n \le 3$. 5

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ निम्न द्वारा परिभाषित :

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$

अभिसारी है और $2 \le \lim_{n \to \infty} a_n \le 3$ ।

4. (a) The geometrical series $a + ar + ar^2 ......\infty$

(i) Converges if $|r| < 1$

(ii) Diverges if $r > 1$.

ज्यामितीय श्रृंखला $a + ar + ar^2 ....\infty$

(i) अभिसरण करती है यदि $|r| < 1$

(ii) अपसरण करती है यदि $r > 1$ ।

(b) Discuss the convergence of the series

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\log(n+1) - \log n\right].$$ 5

$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\log(n+1) - \log n\right]$ श्रृंखला के अभिसरण पर चर्चा कीजिए ।

Section C
खण्ड 'स'

5. (a) State and prove D'Alembert's Ratio Test. 5

डी' एलेम्बर्ट के अनुपात परीक्षण को लिखकर सिद्ध कीजिए ।

(b) Test the convergence of the series :

$$x^2 + \frac{2^2}{3.4}x^4 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8 + ...(x > 0).$$ 5

शृंखला :

$$x^2 + \frac{2^2}{3.4}x^4 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8 + ...(x > 0)$$

के अभिसरण परीक्षण कीजिए ।

6. (a) Test the convergence of the series

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2 + ...(x > 0).$$

5

शृंखला :

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2 + ...(x > 0)$$

के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

(b) Using integral test, test the behaviour of the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0.$$ 5

https://www.cbluonline.com

अवकल परीक्षण का उपयोग करके शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ के व्यवहार का परीक्षण कीजिए ।

Section D

खण्ड 'द'

7. (a) Show that the series $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ converges absolutely for all values of x. 5

दर्शाइए कि शृंखला $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ x के सभी मानों के लिए समान रूप से अभिसरित होती है ।

(b) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent and the sequence $\langle b_n \rangle$ is monotonic and bounded, **then** $\sum a_n b_n$ is convergent. 5

यदि $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अभिसारी है और अनुक्रम $\langle b_n \rangle$ मोनोटोनिक और परिबद्ध है, तो $\sum a_n b_n$ अभिसारी है ।

8. (a) Prove that the infinite product $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$ converges to $\frac{\sin x}{x}$, where x is an arbitrary fixed non-zero number. **5**

सिद्ध कीजिए कि अनंत गुणनफल $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$ $\frac{\sin x}{x}$ में अभिसरण करता है, जहाँ x एक आर्बिट्रेरी नियत गैर-शून्य संख्या है ।

(b) Every absolutely convergent infinite product is convergent. Prove it. **5**

प्रत्येक पूर्ण रूप से अभिसारी अनंत गुणनफल अभिसारी होता है । सिद्ध कीजिए ।

https://www.cbluonline.com

9. Attempt any *five* of the following : **2×5=10**

(a) Define interior point of a set.

(b) Test the convergence of the series

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\log(n+1) - \log n\right].$$

(c) Prove that the following infinite product is divergent :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

(d) Give an example of a set which is bounded above but not bounded below.

(e) Show that the series :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 \ldots\ldots$

diverges to ∞.

(f) Define absolutely and conditional convergence of an infinite series.

https://www.cbluonline.com

निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(अ) एक समुच्चय के आंतरिक बिंदु को परिभाषित कीजिए ।

(ब) शृंखला $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\log(n+1)-\log n\right]$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए ।

(स) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित अनंत गुणनफल अपसारी है :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

(द) एक ऐसे समुच्चय का उदाहरण दीजिए जो कि ऊपर तो परिबद्ध है, लेकिन नीचे परिबद्ध नहीं है ।

(इ) दर्शाइए कि शृंखला :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2\ldots\ldots$$

∞ तक अपसारी हो जाती है ।

(फ) अनंत शृंखला के निरपेक्ष और प्रतिबंधी अभिसरण को परिभाषित कीजिए ।