https://www.cbluonline.com

(UG61)

Roll No. .....

S.C.No.—M/21/2004503

B. Sc. EXAMINATION, 2021

(Fifth Semester) (Main)

MATHEMATICS

12BSM351

Real Analysis

Time : 3 *Hours* *Maximum Marks :* 40

Note : Attempt any *Five* questions. All questions carry equal marks.

किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Define upper sums. If f is a bounded function on $[a, b]$ and P' is a refinement of a partition P of $[a, b]$, then :

$$U(f, P) \geq U(f, P')$$

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

ऊपरी योग को परिभाषित कीजिए । यदि f $[a, b]$ पर एक बाउण्डेड फंक्शन है और P', $[a, b]$ के P विभाजन का परिशोधन है तो :

$$U(f, P) \geq U(f, P')$$

(b) Show that every bounded monotonic function is a integrable function.

दर्शाइए कि प्रत्येक बाउण्डेड मोनोटॉनिक फंक्शन एक समाकलनीय फंक्शन है ।

2. (a) If f is a bounded and integrable on $[a, b]$, then $|f|$ is also bounded and integrable on $[a, b]$. Moreover,

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$$

यदि f परिबद्ध है और $[a, b]$ पर समाकलनीय है, तो $|f|$ भी परिबद्ध है तथा $[a, b]$ पर समाकलनीय है । इसके अलावा :

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$$

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

(b) Show that :

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \frac{1}{3}$$

दर्शाइए कि :

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \frac{1}{3}$$

3. (a) Discuss the convergence of Beta function.

बीटा फंक्शन के कन्वर्जेंस का वर्णन कीजिए ।

(b) Examine the convergence of $\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\,dx$ by Dirichlet's test.

डिरिचलेट परीक्षण द्वारा $\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\,dx$ के कनवर्जेंस का परीक्षण कीजिए ।

4. (a) Show that $\int_0^\infty \frac{\left[(1+y)^{-1} - e^{-y}\right]}{y}\,dy$ is convergent.

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

दर्शाइए कि $\int_0^\infty \frac{\left[(1+y)^{-1} - e^{-y}\right]}{y}\,dy$ कनवर्जेंट है ।

(b) Evaluate : $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\alpha x}{x\left(1+x^2\right)}\,dx$, if $\alpha \ge 0$.

मूल्यांकन कीजिए : $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\alpha x}{x\left(1+x^2\right)}\,dx$, यदि $\alpha \ge 0$ है ।

5. (a) Define diameter of a subset and prove that :

$$\delta(A \cup B) \le \delta(A) + \delta(B) + d(A, B),$$

where A and B are subsets of a metric space (X, d).

एक सबसमुच्चय की डायमीटर को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि :

$$\delta(A \cup B) \le \delta(A) + \delta(B) + d(A, B),$$

जहाँ मैट्रिक्स स्पेस (X, d) के A तथा B उपसमुच्चय हैं ।

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

(b) Prove that interior set of a subset of a metric space is the open set contained in that subset.

सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक स्पेस का उपसमुच्चय का आन्तरिक समुच्चय ओपेन सेट है जिसमें उपसमुच्चय है ।

6. (a) A point 'g' is a limit point of a subset G of a metric space (X, d), iff there is a sequence $<g_n>$ of points of G, all distinct from 'g' which converges to 'g'. Prove it.

एक बिन्दु 'g' एक मैट्रिक स्पेस (X, d) का उपसमुच्चय G का लिमिट बिन्दु है, यदि और केवल यदि G के बिन्दुओं का $<g_n>$ क्रम है, 'g' से सभी अलग हैं जो 'g' तक कन्वर्जेज है । सिद्ध कीजिए ।

(b) Define complete metric space and prove that usual metric space (R, d) is complete.

पूर्ण मैट्रिक स्पेस को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक स्पेस (R, d) पूर्ण है।

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

7. (a) Let (X, d) and (Y, d^*) be metric spaces and 'f' be a function of X into Y. Then f is continuous iff $f^{-1}(G)$ is open in X whenever G is open in Y.

माना कि (X, d) तथा (Y, d^*) मैट्रिक स्पेस हैं तथा 'f', Y में X का फलन है तो f सतत है यदि और केवल यदि $f^{-1}(G)$, X में ओपेन है जहाँ कि G, Y में ओपेन है ।

(b) Define compact set. Prove that a metric space is sequentially compact iff it has the BWP.

कॉम्पैक्ट सेट की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक स्पेस क्रमशः कॉम्पैक्ट है यदि और केवल यदि इसमें BWP है ।

8. (a) Prove that if E is connected subset of a metrix space (X, d) such that $E \subset A \cup B$, where A and B are separated sets in X, then either $E \subset A$ or $E \subset B$.

सिद्ध कीजिए कि E मैट्रिक स्पेस (X, d) का सम्बन्धित उपसमुच्चय है इस प्रकार कि $E \subset A \cup B$, जहाँ A तथा B, X में अलग समुच्चय हैं, तब $E \subset A$ या $E \subset B$ ।

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

(b) Explain ϵ-net with the help of an example. Prove that every totally bounded metric space is bounded.

उदाहरण की सहायता से ϵ-नेट की व्याख्या कीजिए । सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्णरूपेण परिबद्ध मैट्रिक-स्पेस परिबद्ध है ।

9. (a) Examine the convergence of $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

(b) With the help of an example show that $d(A, B) = 0$ but $A \cap B = \phi$.

उदाहरण की सहायता से दर्शाइए कि $d(A, B) = 0$ लेकिन $A \cap B = \phi$ ।

(c) Let (X, d) be a metric space and A, B be subsets of X. Then prove that :

$$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

माना कि (X, d) एक आव्यूह स्पेस है तथा A, B, X का उपसमुच्चय है । सिद्ध कीजिए कि :

$$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

(d) Prove that an isometry is a uniformly continuous functions.

सिद्ध कीजिए कि एक सममिति एक समान रूप से सतत फलन है ।

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com

https://www.cbluonline.com